**Exercice (EMD 2020) :**

Soit L le langage de premier ordre avec égalité contenant deux symboles de **constante a et b**, un symbole de **fonction unaire f**, deux symboles de **prédicat monaire O et C** ainsi qu'un symbole de **prédicat binaire P**.

On définit pour L l’interprétation I suivante de Domaine D = Objets U Couleurs tels que :

Objets = {O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7} l’ensemble des objets ;

Couleurs = {Vert, Bleu, Rouge} l’ensemble des Couleurs ;

I(a) = O2 et I(b)=Rouge ;

I(f) = ψ avec ψ : Objets Couleurs

La fonction ψ associe à chaque objet une couleur suivant la table ci-contre.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | **Objets** | **Couleur** | | O1, O6 | Vert | | O3, O4, O7 | Bleu | | O2, O5 | Rouge |   I(O) désigne la relation « est un objet »,  I(C) désigne la relation « est une couleur »  et I(P) désigne la relation « est posé sur». |  |

1. Conformément à la figure 1 ci-dessous, donner la relation I(P) sous sa forme explicite

I(P)= {(Oi, Oj) / Oi est posé sur Oj}

1. Modéliser les énoncés suivants dans le langage L (en tenant compte de l’interprétation I):

**a)** L’objet O2 n’est pas de couleur rouge ;

**b)** Certains objets sont de couleur rouge ;

**c)** Aucun objet n’est posé sur des objets de couleur rouge.

1. Montrer la déduction suivante dans le langage Lp (┐, ∧ , **∀**):

├ ┐**(∃**x **∀**y P(x, y) ∧ ┐(**∀**y **∃**x P(x, y)))

1. Pour l’interprétation I, étudier la satisfiabilité et/ou la validité des formules ci-dessous :

**a) ∃**x (O(x) ∧ ┐x=a ∧ f(x)=f(a))

**b) (**O(x) ∧ O(y) ∧ P(x,y)) → f(x)=f(y)

**c)** ┐**(∃**x **∀**y P(x, y) ∧ ┐(**∀**y **∃**x P(x, y)))